Cours N°PM6: Les Oscillations mécaniques

Introduction **Ces photos montrent des différents oscillateurs mécaniques. À quoi est du le mouvement d'un oscillateur mécanique ? Quelle est la nature de ce mouvement ? L'amortissement a-t-il influence sur ce mouvement ? Dans quelles conditions un oscillateur devient résonateur ?**

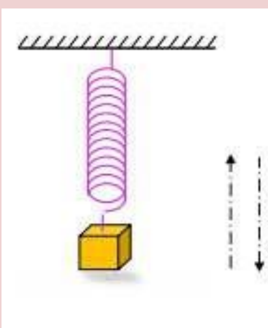
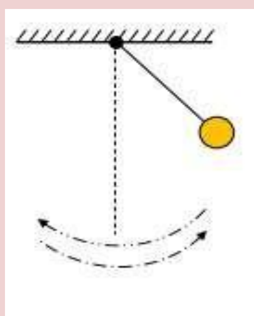
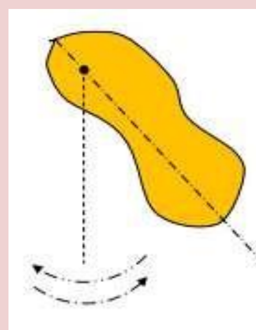
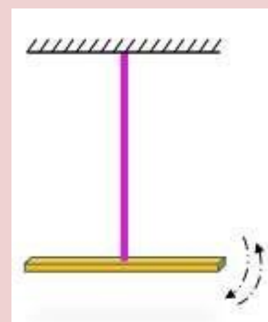
I- Des systèmes mécaniques oscillants

1- Definition :

Un système mécanique oscillant est un système animé d'un mouvement de **va** - et - **vient** autour de sa **position d'équilibre**.

2- Exemples de quelques oscillateurs mécaniques:

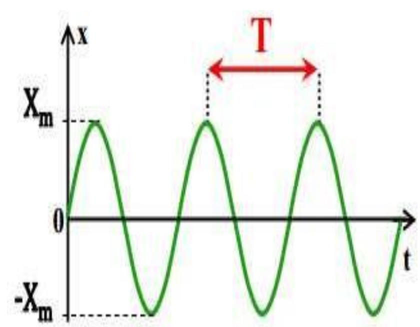
On donne quelques exemples de systèmes mécaniques oscillants:

• Le pendule élastique :	• Le pendule simple :	• Le pendule pesant :	• Le pendule de torsion :
il est constitué d'un corps solide de masse **m** suspendu à un ressort à spires non jointives. 	il est constitué d'un corps solide de masse **m** suspendu à l'extrémité d'un **fil inextensible**. 	il est tout corps solide mobile autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité. 	il est constitué d'une barre horizontale, fixée à l'extrémité d'un **fil de torsion**. 

3- Caractéristiques des mouvements oscillatoires:

Un mouvement oscillatoire est caractérisé par:

- **Sa position d'équilibre stable** : C'est la position à laquelle le système tend à y revenir lorsque l'on en éloigne légèrement.
- **Sa période propre** T_0: C'est le temps mis pour effectuer une oscillation.
- **Son amplitude** X_M *ou* θ_M : C'est la valeur maximale positive que prend la grandeur qui exprime le décalage ou l'inclinaison de l'oscillateur de sa position d'équilibre.



4- Amortissement des oscillations mécaniques :

a) Définition:

En écartant un pendule élastique de sa position d'équilibre et en le lâchant, l'amplitude des oscillations diminue jusqu'à ce qu'il s'annule: on dit que le mouvement est amortie. Le phénomène d'amortissement est provoqué par les frottements. Il existe deux types de frottements:

-Le frottement solide : qui se fait entre l'oscillateur et un corps solide.

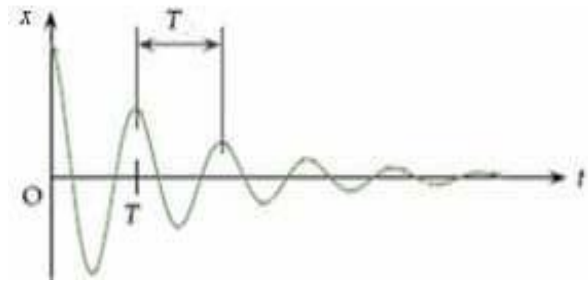
-Le frottement fluide : qui se fait entre l'oscillateur et un corps fluide (liquide ou gaz).

b) les régimes d'amortissement :

- **Le régime pseudo périodique** si l'amortissement est faible, l'amplitude des oscillations diminue progressivement jusqu'à ce qu'il s'annule.

T : La période propre

T_0 : La pseudo période

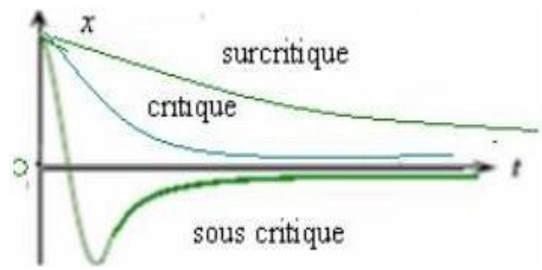


- **Le régime apériodique** si le frottement est fort les oscillations disparaissent et selon l'importance de l'amortissement on distingue trois régimes:

➢ **Le régime sous critique**: l'oscillateur effectue une seule oscillation avant de s'arrêter.

➢ **Le régime critique** : l'oscillateur revient à sa position d'équilibre sans oscillations.

➢ **Le régime sur-critique** l'oscillateur revient à sa position d'équilibre après un temps très long sans oscillations.

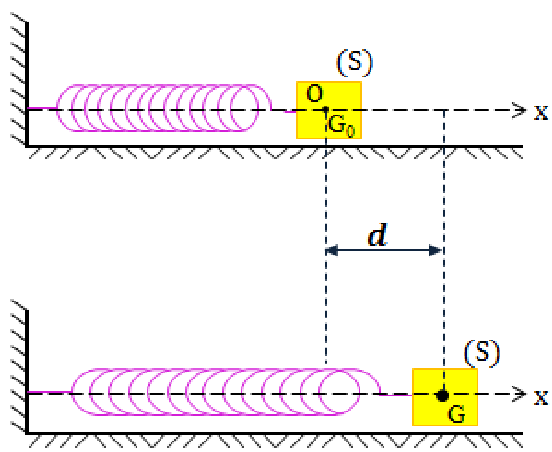


II-Etude de quelques systèmes mécaniques oscillants:

1- Pendule élastique horizontale : étude expérimentale : animation

On dispose sur un banc à coussin d'air horizontal un solide (S) de masse **m** attaché à l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur **k** , l'autre extrémité du ressort accrochée en un point **o** fixe.

- les frottements seront considérés comme négligeables.
- Au repos, G, centre d'inertie de S, est en O, pris comme origine des abscisses sur l'axe horizontal (O, x).
- On écarte G de sa position d'équilibre suivant (O, x) d'une distance **d** vers la droite et sans vitesse initiale.



1-1 Faire le bilan des forces et les représenter

....

....

....

....

1-2 Déterminer l'équation différentielle

....

....

....

....

....

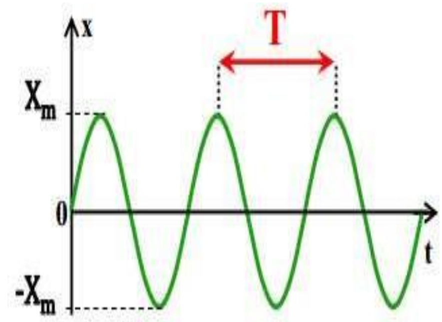
....

....

1-3 Solution de l'équation différentielle : équation horaire

On admet que la solution de l'équation différentielle.. s'écrit sous la forme :

$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, Avec



$x(t)$: l'élongation qui est une valeur algébrique, Elle s'exprime en mètre (m) ,

$-x_m < x(t) < +x_m$

T_0 : est la période propre du mouvement. Elle s'exprime en seconde (s) ;

ω_0: *est la pulsation propre* (rad.s^{-1})

φ : est la phase à l'origine des dates. Elle s'exprime en radian (rad)

X_m : est l'amplitude des oscillations. Elle s'exprime en mètre (m)

1-4 Déterminer l'expression de T_0 .

....

....

....

....

....

....

....

....

Ramarque :

....

....

Application 1 :

Déterminer en exploitant le graphe les grandeurs suivantes :l'amplitude x_m, la période T_0 et φ la phase à l'origine des dates.

....

....

....

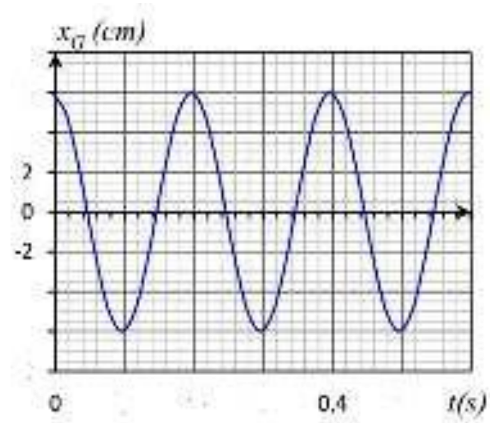
....

....

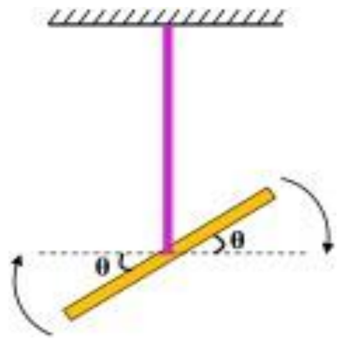
....

....

....



2- Pendule de torsion



Un pendule de torsion est un solide suspendu à un fil vertical, le centre de masse étant sur l'axe du fil, l'autre extrémité du fil étant maintenue fixe dans un support.Quand le solide tourne autour de l'axe du fil, celui-ci réagit à la torsion en exerçant des forces de rappel équivalentes à un couple dont le moment par rapport à l'axe est proportionnel à l'angle de torsion : **moment du couple de torsion** $M_\Delta = -C\ \theta$, la constante **C** dite constante de torsion dépend de la longueur et du diamètre du fil et de la nature du matériau constituant le fil. On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 et on le lâche **sans vitesse** initiale à t=0. Les frottements sont supposés négligeables.

2-1 Faire le bilan des forces et les représenter

....

....

2-2 Déterminer l'équation différentielle

....

....

....

....

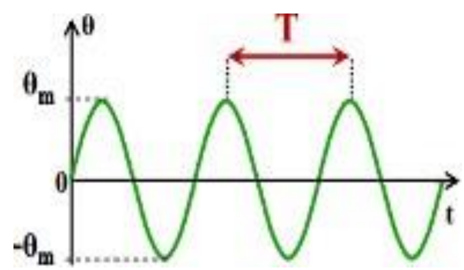
....

....

2-3 Solution de l'équation différentielle : équation horaire

On admet que la solution de l'équation différentielle...s'écrit sous la forme :

$\theta(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, Avec :



$\theta(t)$: l'abscisse angulaire qui est une valeur algébrique, Elle s'exprime en radian (rad) , $-\theta_m < \theta(t) < +\theta_m$

T_0 : est la période propre du mouvement. Elle s'exprime en seconde (s) **;**

ω_0: *est la pulsation propre* (rad.s^{-1})

φ : est la phase à l'origine des dates. Elle s'exprime en radian (rad)

θ_m : est l'amplitude des oscillations. Elle s'exprime en radian (rad)

2-4 Déterminer l'expression de T_0 .

....

....

....

....

....

....

....

Remarque 1 :

………

………

Remarque 2 : Si la tige du pendule de torsion porte deux masselottes équivalentes ayant la même masse. Dans ce cas le moment d'inertie de l'ensemble est : $J'_\Delta = J_\Delta + 2md^2$ **et la période propre :** $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J'_\Delta}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta + 2md^2}{C}}$

Donc $T_0^2 = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{C} + \frac{8\pi^2 m}{C} d^2$

La courbe $T_0^2 = f(d^2)$ **est une fonction affine,**

Son abscisse à l'origine … … … … … … … … …

Son coefficient directeur k $= \frac{\Delta T_0^2}{\Delta d^2} =$ … … … … ….

Application 2 : Un pendule de torsion est constitué d'un disque solide fixé en son centre à un fil métalliqu. l'autre extrémité du fil est fixée à un support . Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe (Δ) qui coïncide avec le fil est $J_\Delta = 5.10^{-3} kg.m^2$ **.** On fait tourner le disque autour de son axe (Δ) et on l'abandonne sans vitesse initiale à la date $t_0 = 0$.

L'équation horaire du mouvement du disque est : $\theta(t) = \frac{5\pi}{100}\cos(2,38\pi t)$

1. Déterminer l'amplitude et la fréquence du mouvement du disque.

2. Calculer la constante de torsion C.

………

………

………

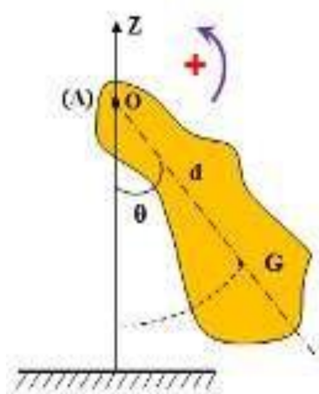
………

………

………

………

3- Pendule pesant



On considère un pendule pesant constitué d'une tige homogène AB. Ce système peut tourner autour d'un axe horizontal (Δ), son moment d'inertie par rapport à (Δ) est J_Δ et sa masse est **m** . On écarte de sa position d'équilibre d'un angle θ_m, puis libéré sans vitesse initiale, le système **(S)** effectue un mouvement de **va**-et-**vient** autour de sa position d'équilibre . Les frottements sont supposés négligeables et les positions du pendule sont repérées par l'abscisse angulaire θ qui forme le système **(S)** avec la verticale OZ passant par la position G_0 du centre d'inertie G du système.

3-1 Faire le bilan des forces et les représenter

....

....

....

3-2 Déterminer l'équation différentielle

....

....

....

....

....

....

....

....

3-3 Solution de l'équation différentielle : équation horaire

On admet que la solution de l'équation différentielle... s'écrit sous la forme :

$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \boldsymbol{\varphi}\right)$ où T_0 $\boldsymbol{\varphi}$, et θ_m **sont des constantes .**

3-4 Déterminer l'expression de T_0 .

....

....

....

....

....

....

....

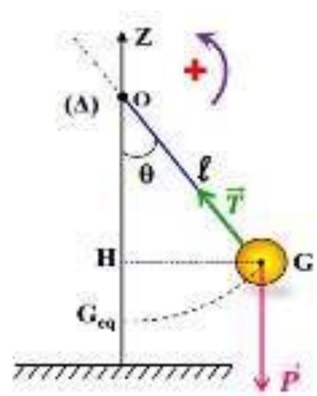
Ramarque :

....

....

4- Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une bille de masse **m** et de centre d'inertie G. Cette bille, assimilable à un objet ponctuel, est accrochée à l'extrémité O d'un fil inextensible de longueur P et de masse négligeable. On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 avec la verticale et on le lâche sans vitesse initiale à t=0.Les frottement sont supposés négligeables.



4-1 Déterminer l'équation différentielle .

……

……

……

……

……

……

……

$\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Ramarque :

……

……

4-3 Solution de l'équation différentielle : équation horaire

On admet que la solution de l'équation différentielle………………………………………………… s'écrit sous la forme :

$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \boldsymbol{\varphi}\right)$ où T_0 $\boldsymbol{\varphi}$, et θ_m **sont des constantes**

4-4 Déterminer l'expression de T_0 .

……

……

……

……

……

……

$\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Ramarque :

……

……

4-5 Analyse dimensionnelle de T_0 .

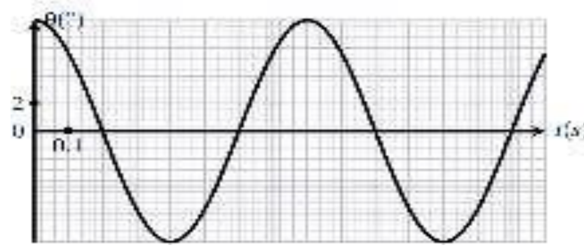
……

……

……

……

……



Application 3 : La courbe ci-contre représente la variation de l'élongation angulaire d'un pendule simple en fonction du temps :

1. Les frottements ont-ils une influence sur le mouvement du pendule ?

2. Préciser les conditions initiales du mouvement.

3. Déterminer l'amplitude et la période propre du mouvement

4. Calculer l'intensité de pesanteur **g** sachant que la longueur du pendule est $l = 0{,}16m$

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

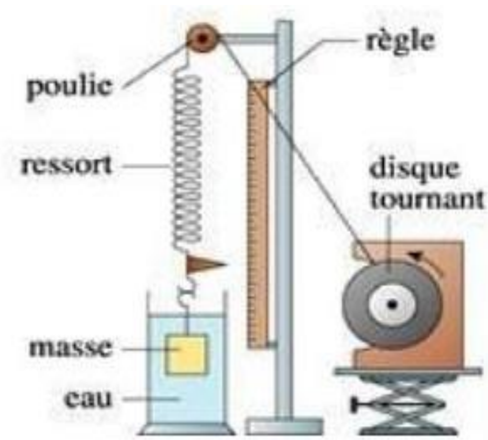
III- Phénomène de résonance mécanique

1- Oscillations forcées

Les frottements agissent sur les oscillations mécaniques et leur mouvement devient amorti. Et on peut entretenir leur mouvement en récompensant l'énergie dissipée par une méthode convenable à l'oscillateur. On lie l'oscillateur avec un appareil qui lui fournit l'énergie nécessaire pour que son mouvement soit entretenu, cet appareil s'appelle : **l'excitateur** qui est un système ayant un mouvement oscillatoire qui impose sa période T_e à l'oscillateur qui s'appelle **résonateur** et le mouvement de ce dernier devient forcé.

2- Résonance mécanique

Dans cet exemple le **pendule élastique** joue le rôle du **résonateur**, sa fréquence propre est f_0 , alors que **le moteur** (disque tournant) joue le rôle de **l'excitateur** sa fréquence est f_e.



En liant l'oscillateur mécanique avec le moteur, il s'oblige d'osciller avec une fréquence égale à celle du moteur.

En faisant varier la fréquence **du moteur** on obtient la plus grande amplitude du résonateur lorsque la fréquence du moteur (excitateur) est égale à la fréquence propre du pendule élastique (résonateur) , **on dit qu'il y'a résonance**

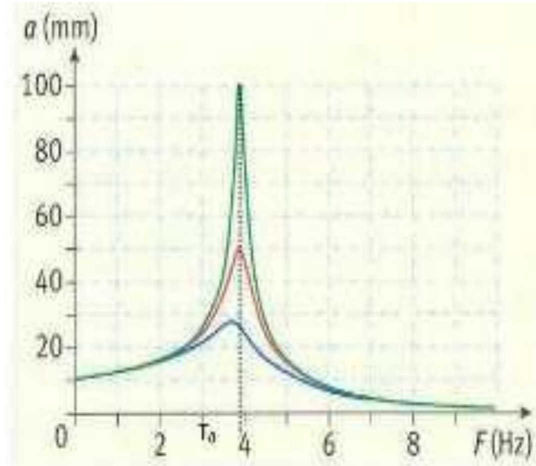
………

………

Remarque

Dans le cas d'un amortissement faible du résonateur, l'amplitude des oscillations forcées à la résonance prend une valeur grande ; **on dit que la résonance est aigue**.

Dans le cas d'un amortissement du résonateur fort, l'amplitude des oscillations prend une valeur faible, **on dit que la résonance est floue**.



Série d'exercices : Oscillations mécaniques

Exercice 1 : On considère un pendule élastique vertical constitué d'un ressort de constante de raideur **k = 20N/m** et d'un corps solide de masse $m = 200g$ On écarte le corps S verticalement vers le bas à partir de sa position d'équilibre d'une distance égale à **3cm** et on le lâche sans vitesse initiale.

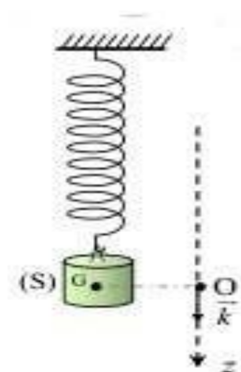
A l'instant $t = 0$ le corps passe de la position d'équilibre stable G, dans le sens positif.

1) Déterminer l'allongement du ressort à l'équilibre ΔP_0

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

3) Donner l'équation horaire du mouvement.

4) Déterminer la période propre du mouvement. **On donne** $g = 10N/\text{kg}$.



Exercice 2 : Un pendule élastique est placé sur un plan inclinéd'un angle $a = 30°$ par rapport au plan horizontal .Le pendule élastique est constitué d'un ressort maintenue par un support fixe à l'une de ses extrémités alors que l'autre extrémité est liée à un corps solide de masse de masse $m = 200g$. (voir schéma).

Sachant que l'allongement du ressort à l'équilibre est: $\Delta P_0 = 8\ cm$

1) Déterminer l'allongement de ressort à l'équilibre.

2) On écarte le corps de sa position d'équilibre de 2cm selon la ligne de la grande pente vers le bas et on le lâche sans Vitesse initiale.

2-1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

2-2-Sachant que le corps passe à $t = 0$ du point d'abscice $x = +1\ cm$ dans le sens positif. Déterminer l'équation horaire du mouvement.

On donne : $g = 10\ N/\text{kg}$